

### Exercice 1 (Ensemble de définition).

Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, déterminer et représenter graphiquement son ensemble de définition.

1.  $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$

2.  $f(x, y) = xy$

3.  $f(x, y) = \frac{y}{x}$

4.  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

5.  $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-1}$

6.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

### Exercice 2 (Continuité).

Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, étudier la continuité et les éventuels prolongements par continuité.

1.  $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$

2.  $f(x, y) = xy$

3.  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

4.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

5.  $f(x, y) = \frac{y}{x}$

6.  $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$

### Exercice 3 (Dérivées partielles).

Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, étudier les deux dérivées partielles (ensembles de définition et de continuité).

1.  $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$

2.  $f(x, y) = xy$

3.  $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$

4.  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$

5.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$

### Exercice 4 (Différentiabilité).

Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, étudier la différentiabilité.

1.  $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$

2.  $f(x, y) = xy$

3.  $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$

4.  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$

**Exercice 5** (Point critique).

Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, déterminer les éventuels points critiques.

1.  $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$
2.  $f(x, y) = xy$
3.  $f(x, y) = xy^2$
4.  $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$

**Exercice 6** (Tangente).

On considère la courbe d'équation  $f(x, y) = 0$  avec  $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$ .

En chacun des points suivants, déterminer l'équation de la tangente à la courbe.

1.  $(x_0, y_0) = (0, 0)$
2.  $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}\right)$
3.  $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}\right)$

**Exercice 7** (Courbe de niveau 0).

Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, déterminer sa courbe de niveau 0.

1.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$
2.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
3.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$
4.  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$
5.  $f(x, y) = x^2 - y^2$
6.  $f(x, y) = x^2 - 4x + 4$