

Exercice 1 (Ensemble de définition).

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer et représenter graphiquement son ensemble de définition.

1. $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$

2. $f(x, y) = xy$

3. $f(x, y) = \frac{y}{x}$

4. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

5. $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2-1}$

6. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Exercice 2 (Continuité).

Pour chacune des fonctions f suivantes, étudier la continuité et les éventuels prolongements par continuité.

1. $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$

2. $f(x, y) = xy$

3. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

4. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

5. $f(x, y) = \frac{y}{x}$

6. $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$

Exercice 3 (Dérivées partielles).

Pour chacune des fonctions f suivantes, étudier les deux dérivées partielles (ensembles de définition et de continuité) .

1. $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$

2. $f(x, y) = xy$

3. $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

4. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

5. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

Exercice 4 (Différentiabilité).

Pour chacune des fonctions f suivantes, étudier la différentiabilité.

1. $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$

2. $f(x, y) = xy$

3. $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

4. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

Exercice 5 (Point critique).

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer les éventuels points critiques.

1. $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$
2. $f(x, y) = xy$
3. $f(x, y) = xy^2$
4. $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$

Exercice 6 (Tangente).

On considère la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ avec $f(x, y) = y^2 - x^3 + x$.

En chacun des points suivants, déterminer l'équation de la tangente à la courbe.

1. $(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}\right)$
3. $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}\right)$

Exercice 7 (Courbe de niveau 0).

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer sa courbe de niveau 0.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
3. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$
4. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$
5. $f(x, y) = x^2 - y^2$
6. $f(x, y) = x^2 - 4x + 4$